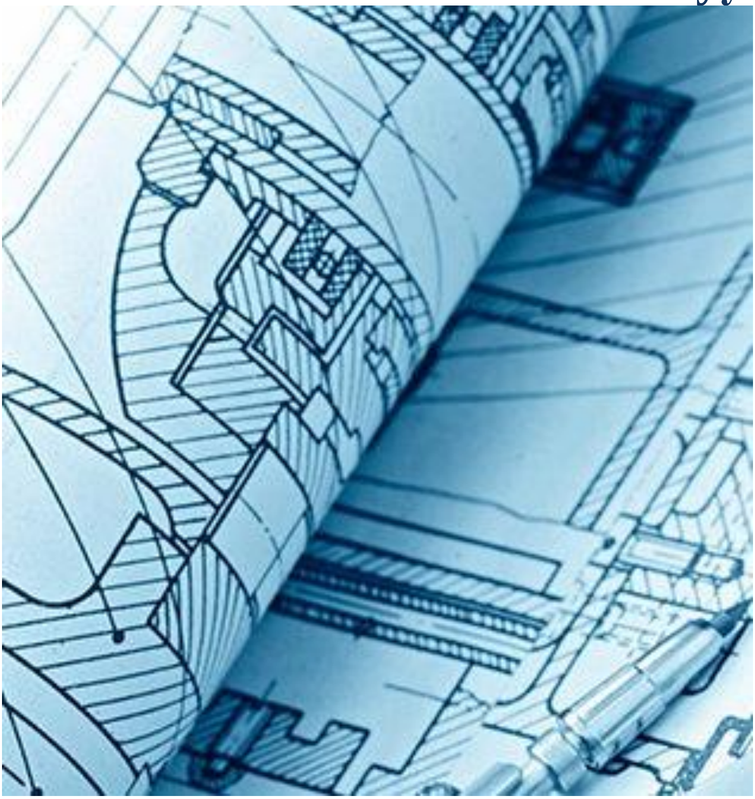
M.A. Hundzina
M.A. Knyazev
N.A. Kondratyeva
A.D. Abdyýew



AMALY MATEMATIKA

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

Белорусский национальный технический университет

**Кафедра
«Инженерная математика»**

AMALY MATEMATIKA

Электронный учебный материал

Минск ◊ БНТУ ◊ 2020

УДК 519.21

Над документом работал(и): Гундина М.А., Князев М.А., Кондратьева Н.А., Абдыев А.Д.

Рецензент:
В.Л. Габец,
доцент кафедры «Конструирование и производство приборов» приборостроительного факультета, кандидат технических наук, доцент

Bu amaly-okuw kitaby Belarus milli tehniki uniwersitetiniň enjamgurluşyk fakultetiniň tehniki ugurlarynda okaýan talyplar üçin “Amaly matematika” dersinden laboratoriýa işlerini geçirmäge niýetlenen.

Berlen kitap özünde “Ýalňyşlykar teoriýasynyň esaslary”, “Algebraik deňlemeler sistemasynyň çözüliş usullary”, “Funksiýalaryň approksimasiýasy”, “Deňlemeleriň sanly çözgüdi” ýaly temalary saklaýar, çünki şol temalary, talyplar geljekde goşma gelýän tehniki sapaklary gowy özleşdirmek üçin, hem-de kurs proýektlarynda kompýuteriň başarnyklaryny, matematik hasaplamalary we modelleşdirmäni ulanmak üçin bütin semestr döwründe öwrenýärler.

Berlen kitabyň gurşap alýan temalary Belarus milli tehniki uniwersitetiniň enjamgurluşyk fakultetiniň tehniki ugurlarynyň okuw programmasyna laýyk gelýär.

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел. (017) 292-40-81, факс (017) 292-91-37
Регистрационный № БНТУ/ПСФ85-18.2020

MAZMUNY

AMALY MATEMATIKA

Bu amaly-okuw kitaby Belarus milli tehniki uniwersitetiniň enjamgurluşyk fakultetiniň tehniki ugurlarynda okaýan talyplar üçin “Amaly matematika” dersinden laboratoriýa işlerini geçirmäge niýetlenen.

Berlen kitap özünde “Ýalňyşlykar teoriýasynyň esaslary”, “Algebraik deňlemeler sistemasynyň çözüliş usullary”, “Funksiýalaryň approksimasiýasy”, “Deňlemeleriň sanly çözgüdi” ýaly temalary saklaýar, çünki şol temalary, talyplar geljekde goşma gelýän tehniki sapaklary gowy özleşdirmek üçin, hem-de kurs proýektlarynda kompýuteriň başarnyklaryny, matematik hasaplamalary we modelleşdirmäni ulanmak üçin bütin semestr döwründe öwrenýärler.

Berlen kitabyň gurşap alýan temalary Belarus milli tehniki uniwersitetiniň enjamgurluşyk fakultetiniň tehniki ugurlarynyň okuw programmasyna laýyk gelýär.

Usulyýet, awtorlar tarapyndan, okaýjylaryň okuw maglumytynyň öwreniş derejesini, berlen dersden zaçýota taýýarlananda özbaşdaklygyny ýokarlandyrmak, didaktikanyň esasy iki prinsipini (elýeterlilik we ulgamlylyk) üpçün etmek maksady bilen ýazylan.

Dykgatly toplanan materiallar başlangyç maglumaty özleşdirmäge kömek edýär, hem-de bar bilimleri ulgamlaşdyrmaga we matematik modelleri ähli ýüze çykýan ýalňyşlyklary bilen gurmaga endikleri döredýär.

Kitabyň ikinji bölümi Belarus milli tehniki uniwersitetinde okaýan daşaryýurt talyplary üçin materiallary saklaýar.

Bu çap etme mugallymlar üçin “Amaly matematika” dersinden laboratoriýa işlerine taýýarlamakda esasy we kömekçi material bolup durýar.

Ylmyň umumy XX asyrda ösüş taryhy we esasanda amaly matematikanyň ösüşi indiki tendensiýalary görkezdi. Kompýuter başarnyklary we alym-barlag geçirijiler häzirki zaman meseleleri çözmegi başarýarlar we şunlukda islendik döwletiň milli gymmatlygy we strategik bölegi bolup durýarlar.

50-nji ýyllarda atom energiýasyny ulanmak we öwrenmek, dolandyryş kompýuter ulgamlaryny döretmek maksatlary goýulýardy.

Dürli ylmy derslerde “düşünje” diýen sözüň manysy dürli manyda duş gelýär. Tehnologiýalar ulgamynda bu söz köplenç “düşünýän, onda başarýan” diýen manyda ulanylýar. Amaly ylymlar ulgamynda hem düşünje sözüne şu manyda aňmaly.

Amaly matematikanyň ösüşine uly urgyny indiki ugurlaryň ösüşi berdi: kriptografiýa, gidrodinamika we asman mehanikasy.

Kriptografiýa sanlar teoriýasynyň, çäkli meýdanlaryň algebraik geometriýasynyň, kombinatorikanyň, kompýuterleriň döremegine getirdi.

Gidrodinamika bolsa ulgamlaýyn analizi, ýönekeý önümlerde deňlemeleri, hasaplamagyň usullaryny döretdi.

Asman mehanikasy bolsa çyzykly algebranyň we wariasion hasaplamanyň döremegine getirdi.

Matematikanyň bölümleriniň biri biri bilen ýakyn baglanyşygyň barlygy matematikanyň iň geňgaldyryjy we ajaýyp tarapydyr. Birnäçe ýüzýyllyklaryň tejribesi netijesinde amaly matematikanyň ösüşi diňe tehniki progressiň ösüşi bilen balanyşykly däl-de, eýsem şol dersiň başgalar bilen ara baglanyşygynyň duýdansyz açyşy hem bar.

XX asyrda amaly matematikanyň zerur üstünlikleri – kompýuterleriň döremegi we çözgütsiz meseleleriň ýüze çykmagy, informasion tehnologiýalaryň ösüşi, internet ulgamlary.

LABORATORIÝA IŞI № 1
Ýalňyşlyklar teoriýasynyň esaslary

§ 1 Ýalňyşlyklaryň çeşmeleri we ýakynlaşdyrylan sanlar

Meseläniň çözgüdi, hasaplaýyş tehnikalaryň ulanylmagy bilen, birnäçe tapgyr geçýär:

- matematik modeliň gurluşy;
- san usulyň saýlanyşy;
- algoritmyň işlenip taýýarlanylyşy, programmirleme;
- hasaplamalaryň geçirilişi.

Bu tapgyrlaryň käbirsi ýalňyşlyklaryň çeşmesi bolup biler, şonuň bilen birlikde iň soňky netijä öz täsirinide ýetirip biler.

Esasy ýalňyşlyklaryň çeşmeleri:

- meseläniň eksperiment üsti bilen alnan berlenleri (berlenleriň ýalňyşlygy);
- hakyky prosesiň ýa-da hadysanyň ýakynladylyp beýan edilen matematik modeli (modeliň ýalňyşlygy) ;

Berlen ýalňyşlyklar aýyryp bolmajaklaryň hataryna girýär. Indiki hasaplamalaryň netijesinde olary niwelirleşdirip (deňleşdirip) bolmaýar.

Eger meseläni çözmek üçin san usuly ulanylsa, onda hasaplama başlamazdan biz täze, usulyň ýalňyşlygy diýip atlandyrylýan, ýalňyşlygy girizmeli.

San usulyň ýalňyşlygyny regulirläp bolýar, teoriýada ony islendik sana çenli kemeldip bolýar.

Ýöne tejribede ol ýalňyşlygy aýryp bolmaýan ýalňyşlygyň ululygyndan birnäçe esse kiçi bolar ýaly edip, şol bilen kanagatlanylýar.

Hasaplamalarda kompýuterleriň takmynanlaşdyryşynyň ýalňyşlygyny razrýad setkasynyň tükenikliligi sebäpli aýryp bolmaýar.

Sany takmynanlaşdyrmanyň düzgünleriniň dürli ýollary bar. Takmynanlaşdyrma matematik bolup bilýär. Bu görnüşinde takmynanlaşdyrylýan sanyň yzyndaky sana seredilýär. Eger ol 5-den uly bolsa, takmynanlaşdyrylýan san bir belgi ulaldylýar, kiçi bolsa, üýtgemeýär.

Bank takmynanlaşdyrmasy ýakyndaky jübüt sanyň üýtgemesi bilen indiki ýagdaýda ýerine ýetirilýär, eger şol sanyň yzyndan soň 5 gelse, başga ýagdaýlarda matematik takmynanlaşdyryş boýunça edilýär.

Duýdansyz takmynanlaşdyrma indiki ýol bilen ýerine ýetirilýär: takmynanlaşdyrma uly ýa-da kiçi tarapa duýdansyz ýagdaýda edilýär, ýöne deň ähtimallykda. Bu ýol islendik sanyň ýalňyşlyklarynyň toplanmasynyň matematik garaşmasyny nula deňeýär.

Mysal.

$$\begin{cases} -10^{-7}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$$

Görkezme.

Sistemadaky birinji deňlemäniň birinji näbellisini ikinji bilen aňladyp, ikinji deňlemä goýuň we sistemany işläň. Soňra, şol işleni' yzygiderligini saklap, ilki bilen ikinji deňlemäniň birinji näbellisini ikinjiniň üsti bilen aňladyp, soň sistemany çözüň. Alnan netijäni analizlaň (gözden geçiriň).

Ýalňyşlyk netijäniň takyklygynyň ölçegi bolup durýar.

Bu ölçegi mukdar taýdan häsiýetlendirmek üçin absolýut we otnositel ýalňyşlyk diýen düşünjeler ulanylýar.

Goý x takyk we näbelli san we x^* belli we x-a ýakynlaşdyrylan san bolsun. Onda absolýut ýalňyşlyk indiki görnüşde bolýar:

$$\Delta x = \left| x - x^* \right| .$$

Absolýut ýalňyşlyk görnüşinde köplenç ölçeg enjamalarynyň baha bölünişiginiň ýarym bahasy alynýar:

$$x \approx x^* \pm \Delta x .$$

Netijäniň takyklygyny häsiýetlendirmek üçin absolýut ýalňyşlygyň bir özi ýetirlik däl.

Absolýut ýalňyşlygy dürli ölçeg tehnologiýalaryň takyklygyny deňeşdiriji baha görnüşinde ulanmak bolmaýar.

$x = 100$ mm bolanda absolýut ýalňyşlyk $\Delta x = 0{,}05$ mm deň bolsa, takyklygyň ýokary üýtgemelerine deň gelýär, $x = 1$ mm bolanda takyklyk az üýtgän diýip hasap etse bolar. Bu ýetmezçilik otnositel ýalňyşlykda ýok. Şol sebäpli ýakynlaşdyrylan bahany has gowy häsiýetlendirmek üçin otnositel ýalňyşlyk ulanylýar we ol absolýut ýalňyşlygyň modulyny ýakynlaşdyrylan bahanyň modulyna gatnaşdyryp tapylýar x^* :.

$$\delta x^* = \frac{\Delta x}{|x^*|}.$$

Köplenç ol prosentda aňladylýar.

Ýakynlaşdyrylan sanlar bilen işlänimizde manyly we dogry sanlar diýen düşünjeler ulanylýar.

Manyly sanlar diýip berlen sanyň çep tarapyndan nol däl sandan başlap bellenilen ähli sanlara aýdylýar.

Mysal.

X= 0,00<u>1425</u>, X=<u>1,237</u>, X=0,0<u>2031.</u>

Manyly san haçanda degişli sanyň absolýut ýalňyşlygy birlik toparynyň ýarymyndan uly bolmasa dogry diýip aýdylýar.

Mysal. Manyly sanlaryň aşagyny çyzyň.

X=0,0<u>273050</u>, X=<u>2,7305.</u>

Mysal. Ýakynlaşdyrylan sanlaryň dogry sanyny tapyň.

X=72,356 $\pm$ 0,026

$\Delta x = 0{,}026 \le 0{,}05 = \frac{1}{2}10^{-1}$,

T.e. X=72,3.

Galan manyly sanlar şübheli diýip atlandyrylýar.

Dogry manyly sanlaryň mukdary sanyň otnositel ýalňyşlygy bilen berk baglanyşyklydyr. Esasanda, eger ýakynlaşdyrylan san x^* özünde N dogry manyly sanlary saklaýan bolsa, onda otnositel ýalňyşlyk üçin aşakdaky gatnaşyk dogrudyr:

$$\delta x^* \approx 10^{-N}.$$

Bu bolsa ýakynlaşdyrylan sanyň takyklygyny bahalandyrmaga berer.

Mysal üçin, x^* =2,031 berlen we şul sanyň ýazgysynda diňe dogry sanlar galdyrylan diýlipdir, onda $\delta x^* \approx 10^{-4}$.

Eger 8 onlugyň galdyrylmagy bilen ýerine ýetirilen hasaplamalar netijesinde san x^* =12,46104223 deň bolsa we $\Delta x = 0{,}02$, onda netije indiki görnüşinde bolýar:

$x \approx 12{,}46 \pm 0{,}02$.

Eger üýtgemeleriň netijesinde alnan san x^* =10428 we $\Delta x = 24$ deň bolsa, onda netije: $x \approx (104{,}2 \pm 0{,}3) \cdot 10^2$.

§ 2 Maşyn arifmetikasynyň aýratynlyklary

Hasaplama ýalňyşlygyň ýüze çykmagynyň esasy sebäbi sanlaryň kompýuterde berilmegidir.

Häzirkizaman kompýuterler bilen bitin we maddy sanlaryň üstünde işlemek bolýar

Häzirkizaman kompýuterlerinde bitin sanlary saklamak üçin 4 baýt goýlan, şunuň esasynda $-2 \cdot 10^9, 2 \cdot 10^9$ aralykdaky bitin sanlar bilen işlemek bolýar.

Ylmy we inžener meseleler işlenilende esasan maddy sanlar ulanylýar. Kompýuteriň ýadynda bu sanlar ýüzüji otur görnişinde şekillendirilen.

Onluk sanlar D şu ýazgyda indiki görnüşde boýar:

$D = \pm m \cdot 10^n$,

m,n – degişilikde sanyň mantissasy we onuň tertibi.

Berlen 357,5 sany indiki görnüşde şekillendirse bolýar: $3575 \cdot 10^{-1}$, $3{,}575 \cdot 10^2$.

Forma $0{,}3575 \cdot 10^3$ ýüzüji oturli normallaşdyrylan formadyr.

§ 3 Ýalňyşlyklar teoriýasynyň göni wezipesi

Ýakynlaşdyrylan sanlar bilen hasaplamalarda esasy wezipe berlenleriň ýalňyşlyklarynyň soňky netijä täsir ediş derejesini bahaandyrmakdyr.

Esasanda, argumenti ýakynlaşdyrylan san bolan funksiýanyň bahasy tapylanda hasaplaýyş bahalaryň ýalňyşlygy barada sorag ýüze çykýar.

Netijäniň ýalňyşlygyny berlenleriň belli ýalňyşlyklarynyň üsti bilen tapmaklyk ýalňyşlyklar teoriýasynyň esasy wezipesi bolup durýar.

Goý $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Onda funksiýanyň absolýut ýalňyşlygy indiki görnüşde bolar:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^k \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*).$$

Mysal. Funksiýanyň absolýut ýalňyşlygyny tapyň:

A) $y = x^7$, B) $y = \sin x$,

C) $z(x, y) = 3x^3 + x\cos y$.

jogaplar:

a) $\Delta y = 7\Delta x^* x^{*6}$, б) $\Delta y = \Delta x^* \left|\cos x^*\right|$,

b) $\Delta z = 9x^2 + \cos y - x\sin y.$

Mesele 1.

Plastik deformasiýalar täsir edýän ýerlerinde napryýaženiýany deformasiýalardan baglylykda tapyp bolar:

$$\sigma = A\varepsilon_i^m, \sqrt{\frac{\sigma_T}{A}} < \varepsilon_i < \sqrt{\frac{\sigma_{пц}}{A}} .$$

Polat 40X üçin material indiki häsiýetlere eýe:

Ululygy we bahasy		Absolýut ýalňyşlygy
$\sigma_T, Н/м^2$	400	0,1
m	0,195	0,002
δ,%	25	1
$\sigma_{пц}, Н/м^2$	373,8	0,5
A	199,545	0,001

Funksiýanyň absolýut we otnositel ýalňyşlygyny tapyň. Onyň grafigini inžener hasaplamalar paketlarynyň üsti bilen guruň.

Mesele 2.

Pikseliň ýagtylygynyň bahasyny çal öwüşginiň bahasyna indiki formula bilen geçirip bolar:

$F(R, G, B) = 0{,}3\ R + 0{,}59\ G + 0{,}11\ B$.

Ululyk	Baha	Absolýut ýalňyşlygy
R	0,NN	0,1N
G	0,1N	0,0N

B	0,*N*2	0,1

N – wariantyň nomeri.

F funksiýanyň absolýut we otnositel ýalňyşlygyny tapyň.

Mesele 3.

Material üçin Gukyň kanunyny berlen wariant boýunça ýazyň:

Wariant	Material	Wariant	Material
1	Alýuminiý	11	Kerep
2	Beton	12	Rezin
3	Wolfram	13	Gurşun
4	Granit	14	Polat
5	Demir	15	Aýna
6	Kapron	16	Pagta
7	Kirpiç goýundysy	17	Çoýun
8	Buz	18	Ýüpek sapagy
9	Mramor	19	Ýüň
10	Organik aýnasy	20	Ebonit

Gatylyk koeffisiýentini dogry berlen diýip hasap edip, uzaltmanyň maýyşgaklyk güýjiniň absolýut we otnositel ýalňyşlygyny tapyň:

War.	Uzaltma, mm	Absolýut ýalňyşlyk	War.	Uzaltma, mm	Absolýut ýalňyşlyk
1	1	0,5	11	4	0,5
2	2	0,2	12	3	0,2
3	3	0,5	13	2	0,3
4	5	0,4	14	1	0,5
5	3	0,6	15	3	0,7
6	2	0,1	16	4	0,4
7	1	0,2	17	5	0,3
8	7	0,4	18	7	0,2
9	6	0,5	19	8	0,1
10	4	0,3	20	8	0,1

§ 4 Hasaplaýyş meseleler. Usullar we algoritmler

Esasy düşünjeler

Meseläniň gurluşy özünde birnäçe giriş berlenleri X we birnäçe çözülişleri Y saklaýar. Hasaplaýyş meseläniň maksady berle $x \in X$ boýunça $y \in Y$ netijäni tapmak.

Dürli amaly meseleleriň möhüm talaplarynyň analizi matematik meseläniň sypaýylygy diýen düşünjelere getirýär.

Hasaplaýyş mesele sypaýy diýip aýdyýar haçanda aşakdaky talaplar ýerine ýetirilse:

1) islendik $x \in X$ giriş berlenlerde $y \in Y$ netije bar;

2) netije ýeketäk;

3) netije berlenleriň kiçi ýüze çykjak soraglaryna durnukly.

Matematik modeliň göni we takyk berlen ýagdaýy häsiýetlendirmeýänligi üçin, başlangyç mesele görnetin netijeli bolsada, degişli hasaplaýyş meseläni işläp bolmazlyk hem mümkin. Dogry, bu ýagdaý meseläniň berlişinde agyr kemçiligiň bardygyny aňladýar.

Käbir meseleler üçin ýeketäklik tebigy alamat bolup durýar, beýlekiler üçin bolsa netije bir däl bolup biler. Mysal üçin, kwadrat deňlemäniň köklerini tapmaklyk.

Y netije giriş berlenler X boýunça durnukly, haçanda ol yzygiderlikde giriş berlenlere bagly:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x^* : \Delta(x^*) < \delta$ соответствует $y^* : \Delta(y^*) < \varepsilon$.

Netijäniň takylygyny ulaltmak talaby awtomatik ýagdaýda berlenleriň takyklygynyň ulaldylmak talabyna getirýär.

Mysal. Matrisanyň rangyny hasaplamak meselesi umumy ýagdaýda durnuksyzdyr.

Goý matrisa $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ berlen, bu matirsanyň rangy 1 deň. Ýöne ýüze çykjak kiçi sorag koeffisiýentiň $a_{22} = \varepsilon \neq 0$ matrisany indiki şekile getirýär: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, bu ýagdaýda rang 2 deň.

§ 5 Hasapaýyş meselaniň şertliligi

Teoriýa taýdan meseläniň durnuklylygy netijäni islendik ýagdaýda kiçi ýalňyşlyk bilen tapsa bolýandygyny, haçanda berlenleriň ýalňyşlygy kiçi bolsa, aňladýar.

Ýöne praktikada giriş berlenleriň ýalňyşlygyny isledigiňçe kiçeldip bolmaýar, olaryň takyklygy çäklidir. Muny kompýutere berlenleriň ýazylmalydygy hem göni taýdan subut edýär.

Kiçi, ýöne soňky berlenleriň ýalňyşlyşlygy nähili islenilýän netijäni ýoýup biler?

Hasaplaýyş meseläniň şertliligi – onuň netijesiniň kiçi ýalňyşlyklara duýgurlygydyr.

Mesele gowy şertli diýip, haçanda berlenleriň kiçi ýalňyşlygy netijäniň kiçi ýalňyşlygyna laýyk gelse, we gowy däl şertli diýip , eger şu ikisiniň arasynda uly üýtgeşmeler bar bolsa aýdylýar.

Käbir halatlarda hasaplaýyş meseläniň şertliliginiň mukdar ölçegini almak bolýar,ol şertlilik sany diýip atlandyrylýar. Bu ululugy işlenişde berlenleriň ýalňyşlygy bilen gatnaşykdaky ýalňyşlygyň mümkin ösmek koeffisiýenti görnüşinde interpretirlemek bolýar

Goý v_Δ - şertliligiň absolýut sany, v_δ - şertliligiň otnositel sany, onda:

$$\Delta(y^*) \le v_\Delta \cdot \Delta(x^*)\,,\, \delta(y^*) \le v_\delta \cdot \delta(x^*)\,.$$

Gowy däl şertli mesele üçin $v >> 1$.

Umuman aýdanymyzda, eger $v \sim 10^N$, bu taýda v- şertliligiň otnositel sany, onda N dereje dogry sanlaryň sanawyny görkezýär, çünki bu san netijede giriş berlenleriň dogry sanlaryndan ýitirim bolup biler.

Mysal üçin, eger 0,1% takyklyk bilen işlemeli bolsa, başlangyç berlenler 0,02% bilen berlen bolsa, onda v = 10 meseläniň gowy däl şertlidigini görkezýär.

Başga tarapdan, başlangyç berlenler 0,0001% takyklyk bilen berlen bolsa, v = 1000 bolup, mesele gowy şertli diýse bolýar.

§ 6 Wektor we matrisa normalary. Çyzykly algebraik ulgamly meseleleriň işlenilişinde şertlilik

Wektor $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in C^m$

$\|x\|_p = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|)^{1/p}, p \geq 1$. Bu san Gelderiň normasy diýip atlandyrylýar we normanyň ähli häsiýetlerine jogap berýär:

1) $\|x\|_p \geq 0$; $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x_i = 0, i = 1,...,n$.

2) $\|\alpha x\|_p = |\alpha| \|x\|_p, \alpha \in C.$

3) $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Praktikada indiki Gelderiň ýörite normalary ulanylýar:

$$p = 1: \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \; p = 2: \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \; p = \infty : \|x\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Indi n hatarly, elementleri kompleks sanlar bolan, kwadrat matrisalar köplügine göz aýlaly:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ & ... & \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in C .$$

Matrisa normasy wektor norma bilen ylalaşykly, eger-de indiki deňsizlik ýerine ýetse: $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|, \forall x \in C^n, A \in M_n(C)$ - kwadrat matrisalar köplügi.

$\|\bar{x}\|_1$, $\|\bar{x}\|_2$, $\|\bar{x}\|_\infty$ normalara $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$ normalar tabyndyr we indiki görnüşde bolýarlar:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \|A\|_2 = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\lambda_j (A^T A)}, \; \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

Bu ýerde $\lambda_j (A^T A)$ - $A^T A$ matrisanyň özlük sanlary.

Meseläniň şertliligi diýen soraga göz aýlaly: ulgamlaýyn çyzykly algebraik deňlemeleriň işlenilişi.

$A\overline{x} = \overline{b}$.

Goý ulgamyň netijesi wektor setir x^* bolsun.

Indiki ulgama seredeli: $(A + \Delta A)(x^* + \Delta x) = b + \Delta b$

bu ýerde $\left\| A^{-1} \right\| \left\| \Delta A \right\| < 1$,

$$\delta(x^*) \le (\mathrm{cond(A)}/(1 - \mathrm{cond(A)}\delta(A^*)))(\delta(b^*) + \delta(A^*)),$$

bu ýerde $\delta(b^*) = \dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$, $\delta(A^*) = \dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ – degişlilikde sag tarapdaky wektoryň otnositel ýalňyşlygy we ulgamyň matrisasy, san $\mathrm{cond(A)} = \left\| A^{-1} \right\| \left\| A \right\|$ şertliligiň standart sanydyr.

LABORATORIÝA IŞI № 2
ÇYZYKLY ALGEBRAIK ULGAMAÝYN DEŇLEMELERIŇ IŞLENIŞ USULLARY

§ 7 Ýollama usuly

n çyzykly deňlemeler ulgamyny n näbelli bilen ýazalyň:

$AX = C$.

Çyzykly algebraik deňlemeler ulgamyny işlemegiň usullary 2 topara bölünýär: göni we iterasion.

Göni usullar näbellileri tapmak üçin belli formulalary ulanýarlar. Göni usullaryň ýetmezçiligi hem bar: olar operatiw ýatda şol wagtda ähli matrisany ýatlamagy talap edýärler, bu ýagdaýda, n sanly uly matrisalar üçin kompýuter ýadynyň köp bölegini harç etmeli bolýar.

Iterasion usul – bu yzygiderli ýakynlaşmalar usulydyr. Bularda käbir ýakynlaşdyrylan netijäni– başky ýakynlaşmany bermeli bolýar, ondan soň berlen algoritm boýunça bir sikl hasaplamalar geçirilýär, muňa iterasiýa diýilýär.

Krameryň usuly – göni usul bolup, ol takyk netijäni tapmagy berýär.

Eger bir goşulyjy 10^{-6} tizlik bilen bu usulda hasaplanylsa, onda 20 hatarly matrisa ulgamyny işlemek üçin 300 000 ýyl gerek bolar.

Häzirki wagtda dogry usullaryň üsti bilen ondan hem uly hatarly ulgamlar az wagtda işlenilýärler: $n \approx 10^4$.

Başga usullar ýörite ulgamlar belli bir matrisalaryň görnüşleri üçin döredilen, mysal üçin, üçdiagonallaýyn.

Bu matrisa üçin ýollama usuly ulanylýar.

Bu usul 2 tapgyrdan durýar: göni we yzlaýyn ýol. Netijede, göni ýol bilen ýollama koeffisiýentleri hasaplanylýar. Yzlaýyn ýolda näbellileriň bahasy tapylýar.

Meseläniň işleniş shemasyny getireliň:

Matrisa ulgamynyň elementlerini bereliň:

$N := 5 \qquad n := 50 \qquad i := 1..n$

$ORIGIN := 1$

$$B_i := \frac{2+i+N}{1+i+N} \qquad D_i := (-1)^i \frac{i}{N} \qquad A_i := \frac{i}{2(i+1)N} \qquad C_i := \frac{i}{3(i+1)N}$$

Göz aýlamada ýollama usulyny ýerine ýetirýän ulanyjy funksiýany goşalyň:

$$
\text{progonka}(A,B,C,D) := \left|
\begin{array}{l}
\gamma_1 \leftarrow B_1 \\
\beta_1 \leftarrow \dfrac{D_1}{\gamma_1} \\
\alpha_1 \leftarrow \dfrac{-C_1}{\gamma_1} \\
\text{for } i \in 2..n-1 \\
\quad \left| \begin{array}{l}
\gamma_i \leftarrow B_i + A_i \alpha_{i-1} \\
\alpha_i \leftarrow \dfrac{-C_i}{\gamma_i} \\
\beta_i \leftarrow \dfrac{D_i - A_i \beta_{i-1}}{\gamma_i}
\end{array} \right. \\
\gamma_n \leftarrow B_n + A_n \alpha_{n-1} \\
\beta_n \leftarrow \dfrac{D_n - A_n \beta_{n-1}}{\gamma_n} \\
x_n \leftarrow \beta_n \\
\text{for } i \in n-1, n-2..1 \\
\quad x_i \leftarrow \alpha_i x_{i+1} + \beta_i \\
\text{round}(x,6)
\end{array}
\right.
$$

Mesele 1. Ulgamy ýollama usuly bilen işläň.

Wariant	Esasy diagonalda, onuň ýokarsynda we aşagynda duryan elementler	Ulgamyň sag bölegi
N	$b_i = \dfrac{N+2}{N}$, $a_i = \dfrac{N+2}{N-47}$, $c_i = \dfrac{N+4}{N}$	$b_i = \dfrac{2}{N}$

Berlen algoritm boýunça işlemek üçin 8n sanly arifmetik operasiýalary geçirmeli, şol wagtda Gaussyň usuly bilen bu san $\frac{2}{3}n^3$ deňdir.

§ 8 Ýakobiniň iterasiýa usuly

Eger çyzykly algebraik deňlemeler ulgamy uly hatarly bolsa we onuň esasy matrisasy üçdiagonallaýyn bolmasa, onda göni usullary hemişe ulanyp bolmaýar. Bu ýagdaýda köplenç iterasion algoritmleri ulanýarlar, sebäbi olar gerekli takyklygy üpjün edýärler.

Goý çyzyky algebraik deňlemeler ulgamy berlen bolsun:

$AX = C,$

bu ýerde A – emele gelmeýän kwadrat matrisa we onuň elementleri diagonalda durup nola deň däldirler. Bu ulgamy başgaça görnüşde ýazyp hem bolýar:

$X = BX + c,$

bu ýerde B – şol göwrümdäki kwadrat matrisa, A ýaly, a c – wektor sütüni.

Geçme indiki görnüşde bolýar: ulgamyň birinji deňlemesinden birinji üýtgeýji tapylýar. Ikinjiden ikinji we şunlukda yzygiderli tapylýar.

Berlen c wektor görnüşinde nol wektor hem bolup biler, ýa-da sag bölegiň wektory.

Onda ýakobiniň hasaplaýyş formulasy indiki görnüşde bolýar:

$X^{(k+1)}=BX^{(k)}+c.$

Mysal.

$n := 4 \qquad ORIGIN := 1$

$$A := \begin{pmatrix} 0.99 & -0.02 & 0.62 & -0.08 \\ -0.03 & 0.72 & -0.33 & 0.07 \\ -0.09 & -0.13 & 0.58 & -0.28 \\ -0.19 & 0.23 & -0.08 & 0.63 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} -1.3000 \\ 1.1000 \\ -1.7000 \\ 1.5000 \end{pmatrix}$$

$$
\mathrm{Jakobi}(A,b,\varepsilon) :=
\left|
\begin{array}{l}
n \leftarrow \mathrm{rows}(A) \\
it \leftarrow 0 \\
max\_it \leftarrow 100 \\
\text{for } i \in 1..n \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
\text{for } j \in 1..n \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
B_{i,j} \leftarrow \dfrac{-A_{i,j}}{A_{i,i}} \quad \text{if } i \neq j \\
B_{i,i} \leftarrow 0 \quad \text{otherwise}
\end{array}
\right. \\
c_i \leftarrow \dfrac{b_i}{A_{i,i}} \\
x_i \leftarrow c_i
\end{array}
\right. \\
\text{while } 1 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
y \leftarrow x \\
it \leftarrow it + 1 \\
\text{for } i \in 1..n \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
s \leftarrow 0 \\
\text{for } j \in 1..n \\
\quad s \leftarrow s + B_{i,j} \cdot x_j \\
x_i \leftarrow s + c_i
\end{array}
\right. \\
\text{break if } |y - x| < \varepsilon \vee it \geq max\_it
\end{array}
\right. \\
\text{error("Нет сходимости") if } it \geq max\_it \\
x
\end{array}
\right.
$$

Mesele 2. Ýakobiniň usuly bilen ulgamy işläň.

Wariant	A ulgamyň matrisasy				Wektor b
1	1,70	0,23	0,04	0,05	0,68
	0,00	0,80	0,01	0,02	0,48
	-0,03	-0,22	-0,10	0,00	-0,08
	-0,15	-0,04	-0,03	-1,00	-1,00
2	3,00	0,38	0,49	0,59	1,51
	0,11	2,10	0,32	0,43	1,47
	-0,05	0,05	1,20	0,26	1,08
	-0,22	-0,11	-0,11	0,30	0,32
3	0,77	2,04	-0,21	0,18	1,24
	-0,45	1,23	-0,06	0,00	-0,88
	-1,26	-0,34	1,11	0,00	-0,62
	-0,05	0,26	-0,34	1,12	-1,17
4	0,79	-0,12	0,34	0,16	-0,64
	-0,34	3,08	-0,17	0,18	1,42
	-0,16	-0,34	0,85	0,31	-0,42
	-0,12	0,26	0,08	0,75	0,83
5	0,99	-0,02	2,62	-0,08	-1,30
	-0,03	0,72	-0,33	0,07	1,10
	-0,09	-0,13	0,58	-1,28	-1,70
	-0,19	0,23	-0,08	0,63	1,50
6	3,68	0,16	0,18	0,22	1,16
	0,12	3,59	0,18	0,21	8,20
	0,11	0,14	3,50	0,21	1,24
	0,11	0,14	0,17	3,11	1,27
7	3,55	2,15	0,18	0,21	1,08
	0,11	3,46	0,16	0,19	4,12
	0,12	0,14	3,37	0,20	1,16
	0,10	0,13	2,17	3,28	1,19
8	2,38	0,10	0,12	0,14	5,08
	0,08	2,29	0,11	0,14	5,34
	0,07	0,09	2,20	0,15	5,57
	0,06	0,08	0,11	1,10	5,75

9	1,00 3,00 -0,22 -0,08	-0,17 0,82 -0,18 -0,07	0,33 -0,43 0,79 -0,21	-0,18 0,08 -0,07 0,96	-1,20 0,33 0,48 -1,20
10	0,68 -0,16 -0,37 -0,12	0,18 1,88 -0,27 -0,21	-0,02 0,14 1,02 0,18	-0,21 -0,27 0,24 0,75	1,83 -0,65 6,23 -1,13

§ 9 Ýollama we Ýakobiniň usullarynyň işleme şerti

Ulgamyň koeffisiýentleri üçin ýeterlik şertleri getireliň (ýollama usuly), çünki şolaryň ýerine ýetmeginde hasaplamalar göni ýollama bilen soňuna çenli bolar ýaly (hiç bir koeffisiýentiň bölünijisi 0 bolmaz ýaly).

Hususylykda, bu ulgamyň jogabynyň bardygymy we onuň ýeketäkdigini kepillendirer.

Teorema. Goý ulgamyň koeffisiýentleri diagonal köplük etme şertlerini kanagatlandyrsyn:

$|b_k| \geq |a_k| + |c_k|$, $|b_k| > |a_k|$, $1 \leq k \leq m$,

Bu ýerde a_k, b_k, c_k – ýokarydiagonal, diagonal we aşakdiagonal matrisadaky elementler. Onda yzlaýyn ýollama giriş berlenlere durnuklydyr.

Ýakobiniň usulynyň galtaşýan şertine seredeliň.

Teorema. Goý şert ýerine ýetsin: $\|B\| < 1$, onda:

1) $\overline{X}$ ulgamyň netijesi bar we ol ýeketäk

2) erkin başlangyç $X^{(0)}$ ýakynlaşmada Ýakobiniň usuly deň gelýär we ýalňyşlygyň bahasy:

$$\left\| X^{(n)} - \overline{X} \right\| \leq \|B\|^n \left\| X^{(0)} - \overline{X} \right\|.$$

Usulyň ulanylyşy düşünikli haçanda $\|B\| < 1/2$. Ýöne hakyky ýagdaýlarda $\|B\|$ bire ýakyn sankara eýe bolýar, şol sebäpli ýalňyşlyk indiki görnüşde tapylýar:

$$\varepsilon_1 = \frac{1 - \|B\|}{\|B\|} << 1.$$

Onda ululyk $\left\| X^{(n)} - X^{(n-1)} \right\| < \varepsilon_1$ bu ýerde kiçi, sebäbi ýakynlaşma netijä ýakyn däl-de, usul haýallyk bilen gabat gelýär.

Mesele 3. Wektor *x-yň* (2-nji meselede alnan wektoryň) normalaryny tapyň. *A* matrisanyň normalaryny tapyň (2-nji meselede alnan matrisanyň). Matrisa *A* (2-nji meseleden) şertlilik sanyny tapyň.

LABORATORIÝA IŞI № 3
FUNKSIÝANYŇ APPROKSIMASIÝASY

§ 10 Esasy düşünjeler we kesgitlemeler

Matematik modellerde ulanylýan funksiýalar diňe analitik görnüşde däl-de, tablisa hili hem berilýär we bu tablisada funksiýa diskret argument sanlary berlende belli bolýar.

Praktikada funksiýanyň başga nokatlardaky sanlary hem gerek bolýar, çünki ol sanlar tablisadakylardan üýtgeşik bolmaly.

$f(x)$ funksiýanyň özünden ýönekeý funksiýa $\varphi(x)$ bolan ýakynlaşmasyna approksimasiýa diýilýär. Approksimirleýän $\varphi(x)$ funksiýa $f(x)$ funksiýadan tapawudy iň kiçi bolar ýaly edip gurul ýar.

Köp ulanylýan parametrleriň biri ortakwadrat Ýakynlaşmadyr we onuň iň kiçi baha eýe bolan ululugy:

$$M = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx.$$

Ýakynlaşmanyň berlen diskret $\{x_i\}$ nokatlar köplüginde gurulýan approksimasiýasyna nokatlaýyn approksimasiýa diýilýär.

$y = f(x)$ funksiýanyň tablisada berlen nokatlaýyn ortakwadrat ýakynlaşmasyny, ululygyň minimum şertlerinde duran, approksimirleýän $\varphi(x)$ funksiýanyň üsti bilen almak üçin:

$$S = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \varphi(x_i))^2 ,$$

bu ýerde y_i – $f(x)$ funksiýanyň sany x_i nokatlarda.

Nokatlaýyn approksimasiýanyň başga görnüşi interpolirleme, onda approksimirleýän funksiýa berlen x_i nokatlarda y_i bahalaryna deň bolýar, ýagny ol bahalara $f(x)$ hem eýe bolýar:

$$\varphi(x_i) = y_i,\ i = 0,...,n.$$

Interpolirlemäniň wezipesi tablisada berlen funksiýanyň baglanyşmalar bilen gabat gelmeýän X argumentleriniň, $f(x)$ funksiýanyň bahalaryny hasaplamak ýoly bilen ýakynlaşmasyny tapmakdyr.

Eger $x \in [x_0, x_n]$, onda $f(x)$ funksiýanyň ýakynlaşmasyny tapmaklyk interpolirleme diýilýär, eger $x \notin [x_0, x_n]$, onda bu prosesa ekstropolýasiýa diýilýär.

Belli bolşy ýaly, n+1 nokatdan tekizlikde çyzyk geçirip bolýar, ol çyzyk n derejeli köpagzanyň grafigi bolup durýar, we ol polinom ýeketäkdir.

Mysal üçin, tekizikde iki nokadyň üstünden ýeketäk göni çyzyk geçirip bolýar (1-nji derejeli polinom), üç nokatdan – parabolany geçirip bolýar (üçünji derejeli polinom) we ş.m.

Eger bütin $[x_0, x_n]$ interpolirlemäniň interwalynda, özünde n+1 baglanyşma saklaýan, diňe n derejeli bir polinom gurulsa, onda global interpolýasiýa hakynda gürrüň edilýär.

Lagranž interpolirleme polinomyny indiki usul bilen gurmagy hödür etdi:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Polinomy ýokary derejeli etmezlik üçin interpolirleme kesimini birnäçe böleklere bölýärler we her bölek interwalda öz pes derejeli lokal polinomyny gurýarlar.

Bölek-çyzykly interpolirleme approksimasiýany her kesim aralygyny göni çyzyk görnüşinde göz öňünde tutýar. *MathCad* inžener paketlerinde hasaplamak üçin içinde goýulan *lsplin*e funksiýa ulanylýar.

Bölek-kwadrat interpolirleme approksimasiýany özünde üç nokady saklaýan aralygyny parabola görnüşinde göz öňünde tutýar.

Bölek interpolirlemäniň wajyp ýetmezçiligi dürli interpolirleme polinomlarynyň çatyşma nokatlarynda olaryň birinji önüminiň kesilýän bolmagydyr.

Bu ýetmezçilik interpolirlemäniň ýörite görnüşi ulanylanda aýrylýar, ol splaýn interpolirlemesi diýip atlandyrylýar.

Splaýn – bu her bölek interwalda haýsydyr bir derejeli polinomly funksiýa bolup, bütin kesimiň dowamynda özüniň birnäçe önümleri bilen yzygiderlidir.

$[x_{i-1}, x_i]$ bu interwalda kubly splaýny indiki görnüşde şekillendirse bolýar:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3.$$

Goňşy splaýnlary baglanyşyk nokatlarynda birikdirme şertleri:

1) splaýnlaryň we approksimirleýän funksiýalaryň baglanyşmalarda bahalarynyň deňligi:

$$s_i(x_{i-1}) = y_{i-1},$$
$$s_i(x_i) = y_i.$$

2) splaýnlaryň birinji we ikinji derejeli önümleriniň baglanyşmalarda yzygider bolmagy:

$$s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i),$$
$$s_i''(x_i) = s_{i+1}''(x_i).$$

Goşmaça şert: splaýnyň çäk nokatlarda gyşarmasynyň bolmazlygy, ýagny nol gyşarma.

MathCad inžener paketlarda hasaplamak üçin içinde goýulan funksiýa cspline ulanylýar. Eger funksiýa lspline koeffisiýentleri splaýnyň boş soňlary şertine seredip tapsa, onda funksiýa cspline koeffisiýentleri splaýnyň agramly soňlary şertine seredip tapar.

Mysal. Bölek-çyzykly interpolireme, splaýn-interpolirleme we global interpolirleme gurmagyň tapgyrlary.

$N := 0 \qquad BB := 1$

$$x := \begin{pmatrix} 0.53 \\ 1.1 \\ 1.4 \\ 2.57 \\ 3 \\ 3.8 \\ 4.2 \\ 4.5 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} BB \\ 0.33 \\ 1.0 \\ 1.7 \\ 0.0 \\ 3.4 \\ 4.1 \\ N \end{pmatrix}$$

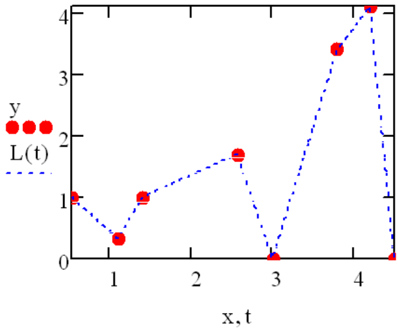
$ORIGIN := 1$

$n := 8$

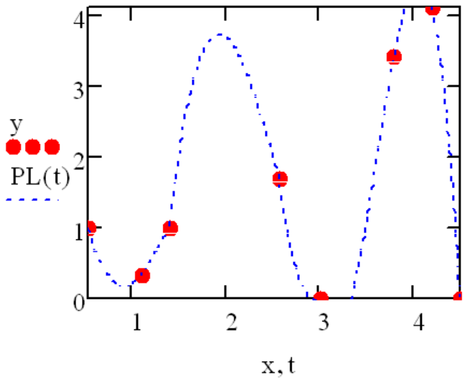
$i := 1..n$

1) Bölek-çyzykly interpolirlemäniň gurluşy:

$$L(t) := \mathrm{linterp}(x,y,t)$$



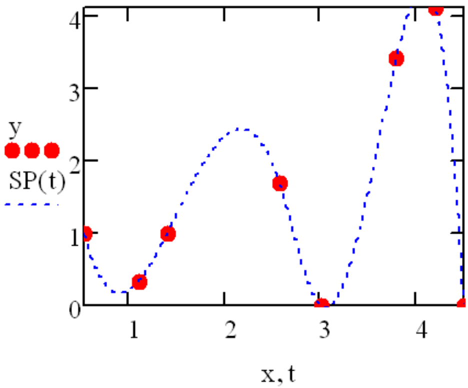
2) Lagranžyň polinomynyň gurluşy. Munuň üçin PL(x) funksiýany degişli köpagza ýazmaly.



3) Kubly splaýn interpolirlemäniň gurluşy:

$$M := \mathrm{cspline}(x,y)$$

$$SP(t) := \mathrm{interp}(M,x,y,t)$$



4) Birinji we ikinji derejeli önümleriniň bölek-çyzykly interpolirleme, kubly splaýn interpolirleme we global interpolirlemäniň grafiklarynyň gurluşy.

Mesele 1. Tablisada berlen sanlara laýyklykda funksiýanyň grafigini guruň. Funksiýanyň lokal we globa interpolirlemesini guruň, bu funksiýalaryň birinji we ikinji derejeli önümleriniň grafigini guruň. Birinji we ikinji önümleriň funksiýalarynyň yzygiderligi hakynda netije çykaryň.

Wariant 1						Wariant 2					
X	0	0,4	1	1,5	2,1	X	9.5	5.8	4.0	1.3	3.4
Y	6,7	7,1	7,6	8,1	8,5	Y	1.5	0.1	-1.3	-2.1	-1.6
Wariant 3						Wariant 4					
X	2	4	6	8	9	X	-2	-1	0	1	2
Y	-0,8	-1,5	-2	-3	-3,7	Y	2,3	2,8	3,6	4	4,7
Wariant 5						Wariant 6					
X	1	1,5	2	2,5	3	X	6.1	0.8	0.3	1.2	0.4
Y	0,3	0,8	1,3	1,9	2,5	Y	0	-2.0	-3.3	-1.8	-2.9
Wariant 7						Wariant 8					
X	5.6	4.8	9.6	5.0	5.3	X	3.7	1.5	9.3	0.4	6.5
Y	-0.4	-1.6	1.3	0.2	-0.1	Y	-1.7	-2.0	2.2	-3.2	0.9
Wariant 9						Wariant 10					
X	2	4	5	6	8	X	-2	0	1	2	4
Y	-1	5	8,5	12	18	Y	0,5	1	1,5	2	3

§ 11 Empiriki baglylyk formulasynyň gurluşy

Muňa çenli, biz berlen funksiýa bilen approksimirleýän funksiýanyň deň gelşini interpolirleme baglaşmalarynda takyk diýip aýdyp geldik.

Eger gürrüň eksperimental maglumatlaryň üstünde işlemek hakynda gitse, göz aýlamalar netijesinde alnan, onda eksperimental maglumatlar hemişe özlerinde dürli görnüşli ýalňyşlyklary saklaýarlar. Olary sistematik, tötänleýin we gödek ýalňyşlyklar diýen toparlara bölýärler.

Sistematik ýalňyşlyklar, esasanda, bir tarapa süýşýärler (eksperimentiň şertleri täsir edýär, ölçeg enjamynyň kemçiligi).

Tötänleýin ýalňyşlyklar köpsanly faktorlaryň üsti bilen tapylýarlar, çünki olary aýryp we üýtgedip ýa-da üstünde uşläp bolmaýar. Olar tötänleýin we sistematik däl häsiýetlidirler.

Gödek ýalňyşlyklar netijäni üýtgedip bilýärler, şonuň üçin olary hasaplamalara goşmaýarlar.

Goý eksperimentiň netijesinde Y we X arasyndaky baglanyşygy öwrenilende üýtgemeleriň esasynda indiki tablisadaky bahalar alnan:

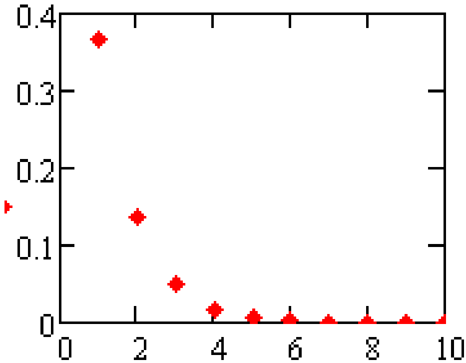
X	x_0	$\ldots$	x_n
Y	y_0	$\ldots$	y_n

Esasy mesele $y = f(x)$ - yň, ýakynlaşmanyň baglanyşygyny görkezýän, formulasyny tapmak

Toplanan tejribeler esasynda empirik formulany gurmagyň prosesi 2 tapgyra bölünýär: ilki bilen formulanyň görnüşi saýlanylýar, soň eýýäm ýakynaşma iň gowy bolar ýaly parametrleriň bahalary tapylýar.

§ 12 Deňeme usuly

Usuly teswirlemezden öň, mysala göz aýlalyň.



Surat 1. – Başlangyç maglumatlaryň grafigi

Grafikdan görnüşi ýaly $y = f(x)$ funksiýa eksponensial häsiýete eýe:

$y = a \cdot e^{bx}$.

Bu deňlemäniň iki tarapyndan hem natural logarifm alalyň:

$\ln y = \ln a + bx$.

Onda ln*y* we *x* öz arasynda göni çyzyk emele getirýärler.

Eger eksperiment maglumatlary hakykatdan-da eksponensial häsiýete eýe bolsa, onda ln*y*-*yň* *x*-dan bolan grafigi göni çyzyga ýakyn bolmaly.

Şeýle bolsa, onda empirik formula dogry diýip hasap edilýär.

Deňeme usuly indikini özünde jemleýär: X we Y arasynda bir baglanyşyk bar diýip çak edip, käbir X^* we Y^* ululyklary tapýarlar, ol ululyklar çak etme boýunça öz arasynda göni çyzyk görnüşinde baglanyşykly bolmaly.

Grafiga seredip, X^*, Y^* ululyklaryň arasyndaky baglylyk nähilidigi barada netije edýärler. Ondan başgada çyzyklymy ol baglanyşyk we ş.m., şoňa seredip, formulanyň dogry saýlanandygy hakynda gürrüň edýärler.

Tablisa 1. Saýlama warianty X^*, Y^*

	X^*	Y^*
$y = a \cdot x^b$	$\ln x$	$\ln y$
$y = a \cdot e^{bx}$	x	$\ln y$

$y=a+bx^2$	x^2	y
$y=\dfrac{1}{a+b\cdot x}$	x	$\dfrac{1}{y}$
$y=a+b\cdot\ln x$	$\ln x$	y
$y=a+\dfrac{b}{x}$	$\dfrac{1}{x}$	y
$y=\dfrac{x}{a\cdot x+b}$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{y}$

Ikinji tapgyr haçanda baglylyk görnüşi belli bolsa saýlanylýar, şol sanda näbelli parametrleri kesgitlemek gerekdir.

Tablisadaky nokatlaryň ählisiniň gyşartmalaryň kwadratlarynyň jemini tapalyň:

$$Q=\sum_i(\varphi(x_i,c_0,c_1,...,c_m)-y_i)^2,$$

Bu ýerde $c_0,c_1,...,c_m$ tapmaly Q funksiýanyň minimumlar şerti boýunça kesgitlenilýär. Iň kiçi kwadratlar usulynyň esasy pikiri hem şudyr.

§ 13 Empirik baglylyklaryň gurluşy üçin oturdylan funksiýalaryň ulanylyşy

Deňeme usuly boýunça empirik formulalar barlanylanda käbir çyzyk görnüşine çyzyklaşdyrylan maglumatlar göz arkaly kesgitlenilýärler, munuň käte ýalňyş bolmagy hem mümkin. Matematik statistikada nokatlaryň arasyndaky ýakynlygy san taýdan häsiýetlendirýän görkeziji bar. Inžener paketlarda corr funksiýa şol görkeziji koeffisiýenti kesgitleýär.

Çyzyk däl baglylyklaryň koeffisiýentini kesgitlemek üçin inžener paketlary bolan MathCad – da birnäçe funksiýalar bar (tablisa 2).

Tablisa 2. Çyzyk däl baglylyklary gurmak üçin oturdylan funksiýalar

Funksiýanyň ady	Baglylyk formasy
$expfit(Vx,Vy,Vg)$	$y=a\cdot\exp(b\cdot x)+c$

$logfit(Vx,Vy,Vg)$	$y = a \cdot \ln(x+b)+c$
$pwrfit(Vx,Vy,Vg)$	$y = a \cdot x^b + c$
$sinfit(Vx,Vy,Vg)$	$y = a \cdot \sin(x+b)+c$
$lgpfit(Vx,Vy,Vg)$	$y = \dfrac{a}{1+b \cdot \exp(-c \cdot x)}$

Eger-de gözegçilik edilýän funksiýa çyzykly däl bolsa, onda onuň baglylyk derejesini häsiýetlendirmek üçin determinasiýa indeksy ulanylýar:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum(\varphi(x_i) - Y_i)^2}{\sum(Y_i - \frac{1}{n}\sum Y_i)^2}.$$

Bu ululygyň bahasy näçe 1 ýakyn bolsa, şonça-da çyzyk regressiýa ýakyn diýip hasap edilýär.

Mysal üçin, X – kömür gatynyň galyňlygy, Y – kömüriň bir günde gazylyp alnyşy. Eger $R^2 = 0{,}91$, onda muny indiki görnüşde düşindirse bolýar: bagly üýtgeýji Y – yň üýtgeýşi 91% X – a baglydyr. Galan 9 % tötänleýin täsir edýän faktorlar diýip düşünse bolar.

Mysal. Tablisada berlen maglumatlar boýunça çyzykly däl funksiýalaryň grafiklaryny gurmak.

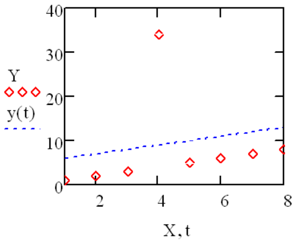
Ilki bilen başlangyç maglumatlary we çyzyk däl baglylygyň wektor koffesiýentlerini girizeliň

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 34 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad P0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Çyzykly regressiýanyň gurluşy

$V1 := \mathrm{medfit}(X, Y)$

$V1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad a1 := V1_0 \quad b1 := V1_1 \quad y(t) := a1 + b1 \cdot t$



$n := \mathrm{length}(X) - 1$

$i := 0 .. n$

$d_i := \left| y\left(X_i\right) - Y_i \right|$

$\max(d) = 25$

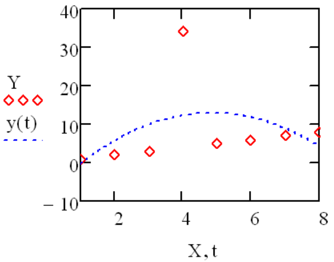
$$S := \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \frac{\left(y\left(X_i\right) - Y_i\right)^2}{n}}$$

$S = 10.$

Kwadrat regressiýanyň gurluşy

$V2 := \mathrm{regress}(X, Y, 2)$

$y(t) := \mathrm{interp}(V2, X, Y, t)$



$n := \mathrm{length}(X) - 1$

$i := 0 .. n$

$d_i := \left| y\left(X_i\right) - Y_i \right|$

$\max(d) = 21.607$

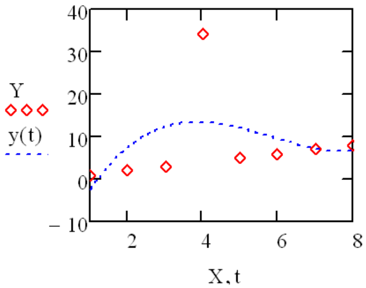
$$S := \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \frac{\left(y\left(X_i\right) - Y_i\right)^2}{n}}$$

$S = 9.623$

Kubly regressiýanyň gurluşy

$V3 := \mathrm{regress}(X, Y, 3)$

$y(t) := \mathrm{interp}(V3, X, Y, t)$



$n := \mathrm{length}(X) - 1$

$i := 0..n$

$d_i := \left| y\left(X_i\right) - Y_i \right|$

$\max(d) = 20.584$

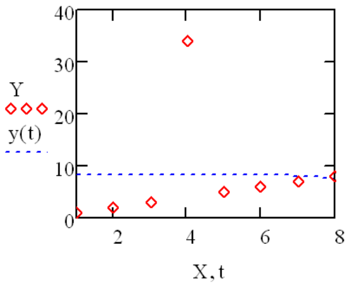
$$S := \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \frac{\left(y\left(X_i\right) - Y_i\right)^2}{n}} \qquad S = 9.392$$

Eksponensial regressiýanyň gurluşy

$V4 := \mathrm{expfit}(X, Y, P0)$

$a4 := V4_0 \qquad b4 := V4_1 \qquad c4 := V4_2$

$y(t) := a4 \cdot \exp(b4 \cdot t) + c4$



$n := \mathrm{length}(X) - 1$

$i := 0..n$

$d_i := \left| y\left(X_i\right) - Y_i \right|$

$\max(d) = 25.588$

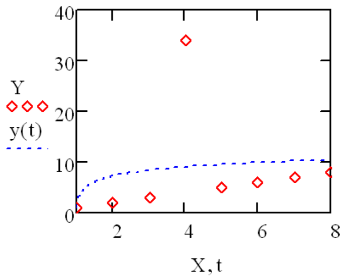
$$S := \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \frac{\left(y\left(X_i\right) - Y_i\right)^2}{n}} \qquad S = 10.683$$

Logarifmik regressiýanyň gurluşy

$$V5 := \mathrm{logfit}(X, Y, P0)$$

$$a5 := V5_0 \quad b5 := V5_1 \quad c5 := V5_2$$

$$y(t) := a5 \cdot \ln(b5 + t) + c5$$



$$n := \mathrm{length}(X) - 1$$

$$i := 0 .. n$$

$$d_i := \left| y\left(X_i\right) - Y_i \right|$$

$$\max(d) = 24.906$$

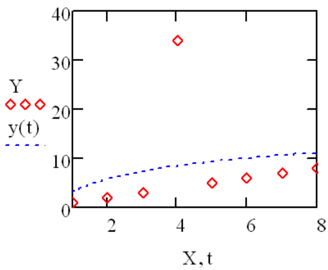
$$S := \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \frac{\left(y\left(X_i\right) - Y_i\right)^2}{n}} \qquad S = 10.218$$

Derejeli regressiýanyň gurluşy

$$V6 := \mathrm{pwrfit}(X, Y, P0)$$

$$a6 := V6_0 \quad b6 := V6_1 \quad c6 := V6_2$$

$$y(t) := a6 \cdot t^{b6} + c6$$



$$n := \mathrm{length}(X) - 1$$

$$i := 0 .. n$$

$$d_i := \left| y\left(X_i\right) - Y_i \right|$$

$$\max(d) = 25.515$$

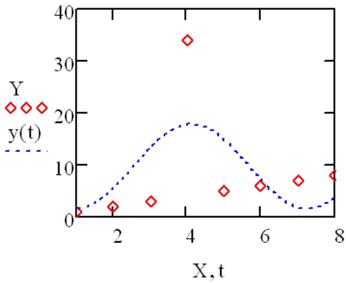
$$S := \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \frac{\left(y\left(X_i\right) - Y_i\right)^2}{n}} \qquad S = 10.336$$

Sinusoidal regressiýanyň gurluşy

$V7 := \mathrm{sinfit}(X, Y, P0)$

$a7 := V7_0 \quad b7 := V7_1 \quad c7 := V7_2$

$y(t) := a7 \cdot \sin(t + b7) + c7$



$n := \mathrm{length}(X) - 1$

$i := 0 .. n$

$d_i := \left| y\left(X_i\right) - Y_i \right|$

$\max(d) = 16.187$

$$S := \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \frac{\left(y\left(X_i\right) - Y_i\right)^2}{n}} \qquad S = 8.659$$

Mesele 2. Tablisada berlen maglumatlar boýunça çyzykly däl funksiýalaryň grafiklaryny gurmaly. Ortakwadrat gyşartma boýunça iň gowy modeli saýlaň.

Wariant 1						Wariant 2				
X	0	1	2	4	6	X	1	2	3	4	5
Y	6	7,2	9,4	11	15	Y	3,2	4,2	2,7	0,7	1,2
Wariant 3						Wariant 4					
X	0	1	3	6	8	X	4,1	5	8,1	10	12
Y	3,2	4,3	5,4	8,3	9	Y	4	8	10	14	16
Wariant 5						Wariant 6					
X	1,4	1,5	1,8	2	2,4	X	0	0,4	1	1,5	2,1
Y	2	1,9	2,3	2,6	3	Y	6,7	7,1	7,6	8,1	8,6
Wariant 7						Wariant 8					
X	0,3	0,9	1,5	2	2,2	X	1	4	9	16	25
Y	0,2	0,4	0,3	0,5	0,8	Y	0,1	3	8,1	1,9	23,9
Wariant 9						Wariant 10					
X	-2	0	1	2	3	X	-3	-2	-1	0	1
Y	4,7	1	1,2	3,1	-5	Y	1,2	0,8	0,4	0	0,1

Mesele 3. Her haýsy baglylyklary analizlap, determinasiýa koeffisiýentini hasaplaň. Başlangyç maglumatlaryň modeli bilen alnan maglumatlary deňeşdirip netije çykaryň.

LABORATORIÝA IŞI № 4
ÝÖNEKEÝ DIFFERENSIAL DEŇLEMELERI IŞLEMEGIŇ SAN USULY

§ 14 Esasy düşünjeler we kesgitlemeler

Differensial deňlemeler prosesleriň we hadysalaryň matematik modelirlemesinde giňden ulanylýarlar: kosmos obýektleriniň hereketi, himiki reaksiýalaryň proseslary, tebigatda biologik populýasiýanyň dinamikasy, ykdysady ösüşiň modeli.

Umumy ýagdaýda, ýönekeý differensial deňlemeler diýip özünde bir ýa-da ondan hem köp derejeli önümli kesgitlenilýän $y = y(x)$ funksiýany saklaýan deňlemelere aýdylýar. Olary aşakdaky görnüşde üekillendirse bolar:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 .$$

Eger bir nokatda goşmaça şertler berlen bolsa:

$$y(x_0) = y_{0,0} \, , \, y'(x_0) = y_{1,0} \, , \ldots , \; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1,0} \, .$$

Munuň ýaly meselä Koşiniň meselesi diýilýär.

Ýönekeý differensial deňlemeleri iölemegiň usullary:

1) analitik;
2) ýakynlaşma;
3) san.

Analitik usuly netijäni analitik özgertmeleriň üsti bilen formula görnüşinde almaklygy başartýar.

Bu ýagdaýda analitik ýol bilen umumy işlenişi analizlap, ondan aýratyn netijeleri alyp bolýar.

Ýakynlaşma usuly deňlemleriň käbir agzalaryny taşlamak üsti bilen deňlemäni ýönekeýleşdirip işlemeklige esaslanýar.

Käbir ýagdaýlarda ilki bilen ýönekeýleşdirilen deňlemäniň jogaby tapylýar, soňra birinji tapgyrda taşlanylan kiçi agzalaryň düzetmeleri bilen takmynan hasaplanylýar.

Berlen toara asimptotik usullar girip, olaryň üsti bilen käbir netije alynýar we ol netije seredilýän hadysany takmynan şekillendirýär.

San usullarynda bolsa, hasaplama işleri örän kän bolup, köp wagt eýeleýär.

Differensial deňlemeleriň san usulyny işlemegiň köplenç ulanylýan we uniwersal ýoly soňky tapawudlar usulydyr.

Bu usulyň manysy indikide: üýtgeýjiniň yzygider meýdany diskret nokatlar köplügine bölünýär, olar baglanyşma diýip atlandyrylýarlar. Bu baglanyşmalar hasaplama setkasyny emele getirýärler. Başlangyç differensial deňleme setka funksiýasyna degişlilikde tapawudlaryň gatnaşygy bilen çalşylýarlar. Çünki bu deňlemä girýän önümler tapawudlar gatnaşygy bilen çalşylýar.

§ 15 Koşiniň meselesiniň işlenilişi

Koşiniň meselesiniň işlenilişiniň gürrüňdeşligini mysal görnüşinde edeliň:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \ a \le x \le b,$$

$$y(a) = y_a.$$

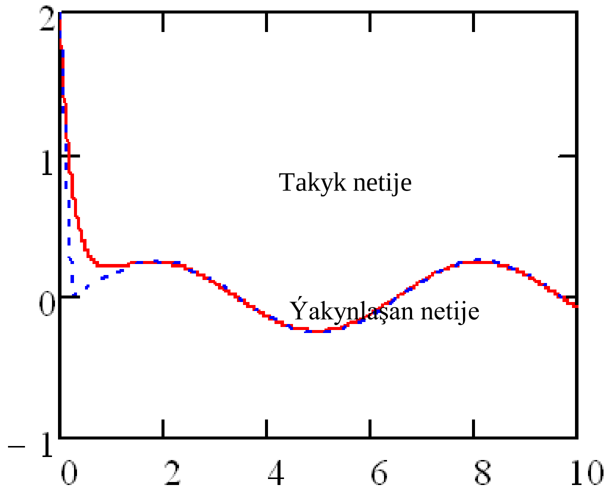
Hasaplama meýdany $[a,b]$ diskret nokatlar toplumyny girizeliň:

$$x_i = a + h \cdot i, \ i = 0,1,...,N, \ h = \frac{b-a}{N}.$$

Bu ýerde x_i nokatlary setkanyň baglanyşygy diýip atlandyralyň, h – setkanyň ädimi.

Goý $\{y_i, i = 0, N\}$ – netijäniň ýakynlaşma sanlarynyň toplumy.

$\{f_i, = f(x_i, y_i), i = \overline{0, N}\}$ – sag bölegiň sanlar toplumy.



Surat 2. – Takyk we ýakynlaşan netijeleriň grafikleri

San usulyň takyklygyny häsiýetlendirmek üçin ýakynlaşan netijäniň ýalňyşlygyny tapalyň:

$$\delta = \max_i |y_i - y(x_i)|\,.$$

Funksiýa *Odesolve* ([vector], x, b, [nstep]) ýönekeý differensial deňlemeleriň berlen başlangyç we soňky şertleri bilen netijelerini getirýär.

Funksiýa *Odesolve* goşmaça Given diýen sözi bilen ulanylýar we hasaplama blokyny guraýar.

vector – tapylýan funksiýanyň wektory, *x* – bagly däl üýtgeýji, *b* – kesimiň netije gözlenilýän soňky nokady, *nstep* – iterasiýa mukdary (kada laýyklykda bu san 100).

San usul bilen işleýän funksiýa *Odesolve* kontekst menýusyndan saýlap alyp bolýar.

Given

$$y'(t) = -4\,y(t) + \sin(t)$$

$$y(0) = 2$$

$$y := \mathrm{Odesolve}(t, 10)$$

§ 16 Eýleriň we Runge-Kuttynyň usullarynyň hasaplama formulalary

Her bir aralykdaky i-njy baglanyşygyň önümini sag bölegiň tapawudlar gatnaşygy bilen çalyşalyň:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)\,, i = \overline{0, N-1},\ y_0 = y_a\,.$$

Yzygiderli y_i bahalary indiki formula boýunça hasaplanylýar:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)\,.$$

Berlen formula Eýleriň usulynyň hasaplama formulasy diýip atlandyrylýar.

$$f(x,y) := -4y + \sin(x)$$

$$N := 40 \qquad y0 := 2$$

$$h := \frac{10}{N} \qquad h = 0.25$$

$$i := 0, 1 .. N - 1 \qquad x_i := i \cdot h$$

$$res_0 := y0$$

$$res_{i+1} := res_i + h \cdot f\left(i \cdot h, res_i\right)$$

Runge-Kuttyň usulynyň hasaplama formulalaryna göz aýlalyň:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} \cdot (p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4)\,,$$

$$p_1 = f(x_i, y_i)$$

$$p_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} p_1),$$

$$p_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} p_2),$$

$$p_4 = f(x_i + h, y_i + h \cdot p_3).$$

$\frac{d}{dx} y = x^2$ $\qquad$ $y0 := 1.3$ $\qquad$ $x0 := 0$

$f(x, y) := x^2$

$$\mathrm{RungeKutta}(y0, x0, x1, N, f) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{x1 - x0}{N} \\ z_{0,0} \leftarrow x0 \\ z_{0,1} \leftarrow y0 \\ \text{for } i \in 1..N \\ \quad \left| \begin{array}{l} z_{i,0} \leftarrow x0 + h \cdot i \\ k1 \leftarrow h \cdot f(z_{i-1,0}, z_{i-1,1}) \\ k2 \leftarrow h \cdot f\left(z_{i-1,0} + \dfrac{h}{2}, z_{i-1,1} + \dfrac{k1}{2}\right) \\ k3 \leftarrow h \cdot f\left(z_{i-1,0} + \dfrac{h}{2}, z_{i-1,1} + \dfrac{k2}{2}\right) \\ k4 \leftarrow h \cdot f\left(z_{i-1,0} + \dfrac{h}{2}, z_{i-1,1} + k3\right) \\ z_{i,1} \leftarrow z_{i-1,1} + \dfrac{1}{6}(k1 + 2k2 + 2k3 + k4) \end{array} \right. \\ z \end{array} \right.$$

Onuň formulasy göwrümi boyunça, Eýleriň usulyna garanda, köp hasaplamalary saklaýar, ýöne takyklyk bu formuada uludyr, şonuň üsti bilen hasaplamany takyk geçirip bolýar.

Funksiýa *rkfixed* (*ic, a, b, nstep, D*) ýönekeý differensial birinji derejeli önümli deňlemäniň netijesini berlen şertler bilen getirip çykarýar.

ic – başlangyç şertleriň wektory, *a*, *b* – bagly däl üýtgeýjiniň başlangyç we soňky bahalary, *nstep* – integrirlemäniň ädiminiň mukdary berýän parametr (ululyk), *D* – differensial deňlemäniň sag böleginiň wektory

Berlen funksiýa diňe birinji derejeli differensial deňlemeleri işlemäge ýaramly. Şonuň üçin ikinji we uly derejeli deňlemeler işlenilende goşmaça şerte birinji derejeli deňlemä ekwiwalent berlişler hädür edilýär.

Mesele 1. Koşiniň meselesini *MathCad – daky goýulan funksiýa bilen işläň.*

Mesele 2. Berlen meselelriň takyk jogabyny tapyň, olary y1(x) diýip belgiläň.

Mesele 3. Meseläni Eýleriň we Runge-Kuttynyň usullary bilen işläň. Alnan netijäniň ýalňyşlygyny tapyň:

Koşiniň meselesi (N – wariant nomeri):

Differensial deňleme	Başlangyç şert
$y' + N \cdot y = \sin(x)$	$y(0) = 2$
$y' = 0{,}04 \cdot y$	$y(0) = N$
$y' = -N \cdot y$	$y(0) = 100$
$y' = 4 - N \cdot x$	$y(0) = 2$
$y' = -\dfrac{x}{N \cdot y}$	$y(0) = 20$

LABORATORIÝA IŞI № 5
BIR ÜÝTGEÝJILI DEŇLEMÄNIŇ IŞLENILIŞI
§ 17 Çyzykly däl deňlemäniň işleniş tapgyrlary

$f(x)=0$ deňlemä seredelliň, bu ýerde $f(x)$ belli we yzygider käbir tükenikli ýa-da tükeniksiz $a<x<b$ interwalda ýerleşen.

Islendik x^* sana, $f(x)$ funksiýany nola öwürýän, $f(x^*)=0$, deňlemäniň kökleri diýilýär.

Köplenç deňleme özünde ýakyn bolan koeffisiýentleri saklaýar, onda meseläniň takyk köklerini tapmaklyk manysyny ýitirýär.

Iki mesele işlenilýär:

1) kökleriň aýrylyşy, ýagny deňlemäniň diňe bir kökini özünde saklaýan kiçi meýdanlaryň gözlegi;
2) berlen takyklyk bilen kökleriň tapylyşy.

Matematikadan belli bolşy ýaly: eger yzygider funksiýa käbir interwalyň soňlarynda ters alamatly köklere eýe bolsa, onda interwal özünde azyndan 1 kök saklaýar.

Özünde bir köki saklaýan meýdanlara bölmek üçin grafiki usuly ulansa bolar, ýa-da meýdanyň ugruna belli bir ädim bilen geçip soňlarda funksiýanyň alamatyna gözegçilik edip hem bolýar.

Ikinji meseläni işlemek üçin köpsanly usullar bar: iterasiýa usuly, kesimi iki bölmek usuly, hordalar usuly, galtaşmalar usuly.

Çyzyk däl deňlemeleriň kesimi iki bölmek usuly bilen işlenişiniň umumy shemasy:

Başlangyç ýakynlaşma görnüşinde aşakdakyny alalyň:

$$c=\frac{a+b}{2},$$

Soňra funksiýanyň soňlarynda $[a,c]$, $[c,b]$ özini alyp barşyna gözegçilik edeliň. Bu ýagdaýda haýsy kesimiň içinde funksiýa öz alamatyny üýtgedýän bolsa, şol kesim saýlanylýar.

Berlen şert ýerine ýetmeýänçe, proses dowam edýär: $|b-a|<\varepsilon$.

Çyzyk däl deňlemeleriň ýönekeý iterasiýa usuly bilen işlenişiniň umumy shemasy:

Deňlemäni iterasion görnüşe getireliň:

$$x=\varphi(x),$$

Bu ýerde funksiýa $\varphi(x)$ berlen [a, b] kesimde differensirlenýän we islendik $x \in [a,b]$ aşakdaky şert ýerine ýetýär:

$$|\varphi'(x)| < 1.$$

Berlen $\varphi(x)$ funksiýany aşakdaky görnüşde saýlap alsa bolýar:

$$\varphi(x) = x + k \cdot f(x),$$

bu ýerde k berlen şertden tapylýar:

$$|\varphi'(x)| = |1 + k \cdot f'(x)| < 1, \forall x \in [a,b].$$

Soňky şert x^* köke berlen iterasion yzygiderliginiň $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ galtaşýandygyny garantiýa edýär.

Hasaplamagyň gutarmak şerti diýip aşakdaky deňsizlik ýerine ýetse aýdyp bileris:

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{\varepsilon \cdot (1-q)}{q}, q = \max|\varphi'(x)|.$$

Hordalar usulynyň hasaplama formulasy:

$$x_{i+1} = \frac{x_0 \cdot f(x_i) - x_i f(x_0)}{f(x_i) - f(x_0)},$$

Galtaşmalar usuly üçin:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Baha x_0 hordalar usuly üçin we başlangyç nokat galtaşmalar usuly üçin deňsizligiň ýerine ýetmekiginiň şertinden alynýar:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0.$$

Hasaplamanyň netijesinde kökiň ýakynlaşmasynyň yzygiderligi alynýar. Hasaplama prosesi indiki şertiň ýerine ýetmegi bilen tamamlanýar:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon.$$

Mesele 1. Oturdylan funksiýa bilen çyzyk däl deňlemäni işläň.

Mesele 2. Çyzyk däl deňlemäni iterasiýalar usuly bilen işläň.
Mesele 3. Berlen çyzyk däl deňlemäni galtaşmalar we hordalar usuly bilen işläň.

1	$x + x \cdot \ln(x + 0{,}5) - 0{,}5 = 0$
2	$x \cdot 3^x - 1 = 0$
3	$x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$
4	$x^3 + 12x - 2 = 0$
5	$5x - 9\ln(x) - 8 = 0$
6	$x^4 + 0{,}5x^3 - 4x^2 - 3x - 0{,}5 = 0$
7	$x - \cos(x) - 0{,}25 = 0$
8	$x^3 - 6x^2 + 20 = 0$
9	$5x^3 + 10x^2 + 5x - 1 = 0$
10	$0{,}1x^2 - x\ln(x) = 0$

LABORATORIÝA IŞI № 6
TRAPESIÝALAR USULY BILEN KESGITLI INTEGRALYŇ TAPYLYŞY

§ 18 Sanly integrirleme

Birlenji integrallary ýakynlaşdyryp işleýän formulalara kwadratur formulalar diýilýär. Şol formulalaryň gurluşynyň ýönekeý ýoly: berlen integralyň aşagyndaky f(x) funksiýa [a, b] kesimde interpolýasion köpagza bilen çalşylýar, mysal üçin, Lagranžyň köpagzasy $L_n(x)$ bilen. Şunlukda, integralyň aşagynda indiki agza takmynanlykda emele geler:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx .$$

Bu ýerde kesim [a,b] birnäçe x_i nokatlar bilen n bölege bölünen.

Deň durnukly gaglanyşmalar üçin $x_i = x_0 + i \cdot h$,

$$h = \frac{b-a}{n}, x_0 = a, x_n = a .$$

Kesgitli rugsat edilmelerde trapesiýalar usulyny alýarys:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}),$$

bu ýerde y_i – funksiýanyň interpolirleme baglanyşyklaryndaky bahalary.

Integrirleme usulynyň trapesiýalar formulasy boýunça hasaplanylanda, bolýan ýalňyşlygynyň bahasy:

$$|R_n| \le M \cdot \frac{|b-a| \cdot h^2}{12}, \ M = \max\left|f^{(2)}(x)\right|, x \in [a,b].$$

Has takyk Simpsonyň formulasydyr:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2h}{3}(\frac{y_0 + y_{2m}}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{2m-1}).$$

Simpsonyň formulasy üçin ýalňyşlygyň bahasy indiki görnüşde hasaplanylýar:

$$|R_n| \le M \cdot \frac{|b-a| \cdot h^4}{180}, \ M = \max\left| f^{(4)}(x) \right|, x \in [a,b].$$

Mesele 1. Berlen funksiýadan [a; b] kesimde integrirlemegiň trapesiýalar formulasy boýunça h=0,1 ädimde boljak bahasynyň programmasyny guruň.

Mesele 2. Berlen funksiýadan [a; b] kesimde integrirlemegiň Simpsonyň formulasy boýunça h=0,1 ädimde boljak bahasynyň programmasyny guruň.

Mesele 3. Integralyň netijesinde alnan bahalaryň ýalňyşlygyny tapyň.

LABORATORIÝA IŞI № 7
DIFFERENSIAL DEŇLEMELERDE ÜÝTGEŞIK ÖNÜMLERIŇ IŞLENILIŞI

§ 19 Tapawutly shemalar

Differensial deňlemeleri aýry önümlerde san taýdan işlemek üçin soňky tapawutlar usuly ulanylýar.

Işleniş meýdanynda *n* baglanyşykly nokatlary saklaýan deňölçegli setkany guralyň.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2l}.$$

Onda ýpkardakylaryň ikinji derejeli aýry önümleri aşakdaky ýaly tapylýar:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{l^2}.$$

Alnan deňlemäni setkada berlen ähli baglanyşykly nokatlar üçin ýazsak, netijede *n* sanly we *n* näbellili deňlemeler ulgamy alynýar.

§ 20 Temperaturanyň paýlanyş meselesenin işlenilişi

Munuň ýaly deňlemeleri öwrenmäge elektrik we magnit meýdany, stasionar ýylylyk meýdany, gidrodinamika baradaky meseleler getirýär.

Puassonyň deňlemesiniň çözüwini käbir çäkli meýdanda gözläliň:

$$\Omega = \{0 \le x \le q_1, 0 \le y \le q_2\}.$$

x we y bitarap üýtgeýjileri utgaşdyryp.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y).$$

Çäkli şertler:

$$u(0,y) = \mu_1(y),\ u(a,y) = \mu_2(y),$$

$$u(x,0)=\mu_3(x)\,,\,u(x,b)=\mu_4(x)\,.$$

Ω meýdamda deňölçegli göniburçly h we l ädimli setkany guralyň: $x_i = i \cdot h$, $y_i = i \cdot l$.

«Krest» differensial meseläni approksimirleýäs, netijede tapawutlar shemasy alynýar:

$$a_{i,j}u_{i+1,j} + b_{i,j}u_{i-1,j} + c_{i,j}u_{i,j+1} + d_{i,j}u_{i,j-1} + e_{i,j}u_{i,j} = f_{i,j}\,,$$

$$a_{i,j} = b_{i,j} = \frac{1}{h^2}\,, c_{i,j} = d_{i,j} = \frac{1}{l^2}\,, e_{i,j} = -2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{l^2}\right).$$

Puassonyň deňlemesini işlemek üçin *MathCad* programmasynda *relax* funksiýasy ulanylýar.

relax(*a, b, c, d, e, f, u, rjac*)Puassonyň deňlemesiniň işlenişiniň kwadrat matrisasyny getirýär.

a, b, c, d, e – bir ölçegli kwadrat matrisalar;

u – meýdanyň daşyndaky netijäni saklaýan we içindäki ýakynlaşmany saklaýan matrisa; *rjac* – san [0,1], we ol algoritmiň gabat gelşini dolandyrýar.

Temperaturanyň paýlanyşy Laplasyň deňlemesi bilen şekillendirilýär:

$$\frac{d}{dx^2}T + \frac{d}{dy^2}T = 0\,.$$

Düşünikli bolar ýay, plastina $h = 0{,}25$ ädimli setkany ýapalyň we şonda şekillendireliň.

$i := 0..4 \quad h := 0.25 \quad j := 0..4$

$x_i := h \cdot i$

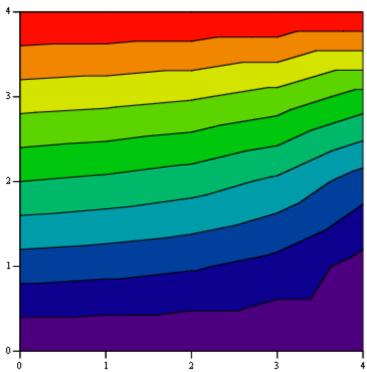
$T_{j,0} := 0 \quad T_{i,4} := 100$

$T_{0,i} := 100 \cdot x_i \quad T_{4,i} := 100 \cdot (x_i)^2$

$a_{j,i} := 1 \; d := a \quad b := a$

$c := a \quad e_{j,i} := -4 \quad f_{j,i} := 0$

$T := \mathrm{relax}(a, b, c, d, e, f, T, 0.95)$



T

Temperaturanyň baglanyşykdaky $T_{i,j}$ täze bahasyny oturdylan *relax* funksiýa bilen tapyp bolýar.

Mesele 1. Kwadrat plastinada başlangyç şertler bilen temperaturanyň paýlanyşy (N – wariant nomer):

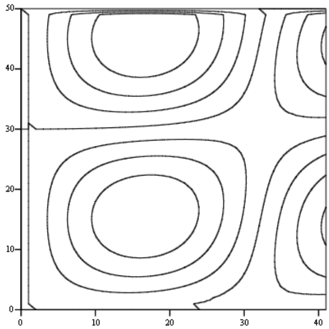
	T
X=0	0
X=1	N
Y=0	100(x-N)
Y=1	100x-N

Paýlanyşy reňkli etmek üçin konteks menýuda indiki funksiýalara ýerine ýetirmeli: Вид ->Заливка контуров ->Карта цветов.

§ 21 Yrgyldylar hakyndaky meseläniň işlenilişi

Yrgyldylar hakyndaky meseläni işlemek üçin tapawutly shemaly mysala seredeliň:

$$
v := \left|
\begin{array}{l}
a \leftarrow 0.1 \\
\text{for } i \in 1..49 \\
\quad \text{for } j \in 1..40 \\
\quad \quad \left|
\begin{array}{l}
v_{0,i} \leftarrow 0.02 \sin\left(\dfrac{\pi \cdot i}{30}\right) \\
v_{j,0} \leftarrow 0 \\
v_{j,50} \leftarrow 0 \\
v_{j+1,i} \leftarrow a^2\left(v_{j,i+1} + v_{j,i-1}\right) + 2\left(1 - a^2\right) \cdot v_{j,i} - v_{j-1,i}
\end{array}
\right. \\
v
\end{array}
\right.
$$



v

Mesele 2. Başlangyç *f*(*x*)-yň bahalarynda yrgyldynyň paýlanyşy:

1	sin(*x*)+1
2	cos(*x*)
3	sin(*x*)
4	2sin(*x*)
5	3cos(*x*)

6	4sin(x)+1
7	3cos(x)
8	4sin(x)
9	12sin(x)
10	0,3cos(x)

Puassonyň deňlemesiniň işleniş shemasyna ýylylygyň doly ýaýryş ýagdaýynda seredeliň.

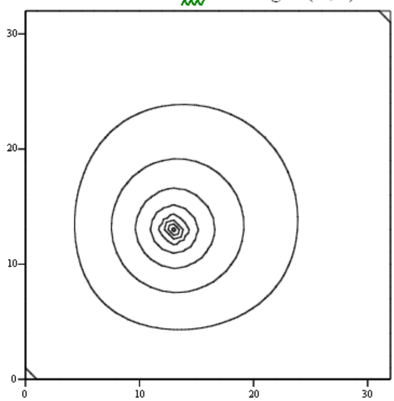
Approksimirleýän setkanyň we çäk şertleriň ölçeglerini bereliň. Soňra çeşmäniň koordinatalaryny we onuň kuwwatyny bereliň.

Deňlemäni oturdylan multigrig(M, ncycle) funksiýa bilen işläliň, bu ýerde M – kwadrat matrisa, onuň ölçegleri $1+2^n$, deňlemäniň sag böleginde saklanylýar, *ncycle* – her bir iterasiýa derejedäki sikl sany.

$M := 2^5$

$F_{13,13} := 124000$ $F_{M,M} := 0$

$T := \mathrm{multigrid}(F,2)$



T

Mesele 3. Puassonyň deňlemesini ýylylygyň doly ýaýryş ýagdaýynda işlemeli. Çeşmäniň koordinatalary (N,N), çeşmäniň kuwwaty N*1000 Вт.

Zaçýotda düşjek soraglaryň sanawy

1. Meseläniň hasaplaýjy tehnikalary ulanyp çözülişiniň prosesi nähili tapgyrlardan durýar?
2. Ýalňyşlyklaryň esasy çeşmelerini sanaň.
3. Ýalňyşlykaryny tiplerini sanaň. Olara haýsylar degişli?
4. Haýsy ýalňyşlyk regurirlenýän we aýryp bolmajak ýalňyşlyklaryň hataryna degişli däl?
5. Tegeleklemäniň esasy tiplerini sanaň. Matematik tegeleklemäni düşündiriň.
6. Netijäniň takyklygynyň ölçegi näme?
7. Absolýut ýalňyşlyk nähili tapylýar?
8. Absolýut ýalňyşlygy dürli ölçeg tehnologiýalarynyň takyklygynyň deňeşdiriji bahasy hökmünde ulanyp bolarmy? Näme üçin?
9. Otnositel ýalňyşlyk nähili hasaplanylýar?
10. Manyly san näme?
11. Haýsy san dogry diýip atlandyrylýar?
12. Ýakynlaşdyrylan sanyň takyklygyny dogry manyly sanyň üsti bilen nähili bahalandyrmaly?
13. Goý $x \approx 5.68 \pm 0,02$. x-yň absolýut ýalňyşlygyny tapyň.
14. Ýalňyşlyklar teoriýasynyň göni maksadyny düşündiriň.
15. Goý $y(x) = \log_2(x)$. Berlen funksiýanyň absolýut ýalňyşlygynyň umumy görnişini tapyň.
16. Goý $y(x) = e^{7x}$. Berlen funksiýanyň absolýut ýalňyşlygynyň umumy görnişini tapyň.
17. Goý $y(x) = x^2 + \cos x$. Berlen funksiýanyň absolýut ýalňyşlygynyň umumy görnişini tapyň.
18. Goý $z(x, y) = x + y$. Berlen funksiýanyň absolýut ýalňyşlygynyň umumy görnişini tapyň.
19. Goý $z(x, y) = 7x - 10y$. Berlen funksiýanyň absolýut ýalňyşlygynyň umumy görnişini tapyň.
20. Goý $z(x, y) = x + y$, $x \approx 5.68 \pm 0,02$, $y \approx 2.31 \pm 0,01$. Berlen funksiýanyň absolýut ýalňyşlygynyň umumy görnişini tapyň.
21. Haýsy hasaplaýyş mesele dogry diýip atlandyrylýar?
22. Hasaplaýyş meseläniň şertliligi näme?

23. Haýsy meselä gowy şertli diýilýär?
24. Haýsy meselä gowy däl şertli diýilýär?
25. Şertliligiň sany näme?
26. Wektoryň normasyny tapyň: x=(1 2 -1 0 6).
27. Wektoryň normasyny tapyň: x = (-1 0 6 8 1).
28. Matrisanyň normasy haýsy formula boýunça tapylýar?
29. Berlen A matrisanyň şertliliginiň sanyny nähili tapmaly?
30. Haýsy iki topara ulgamalýyn çyzykly algebraik deňlemeleriň işlenişiniň usullary bölünýär?
31. Haýsy usul ulgamalýyn çyzykly algebraik deňlemeleriň işlenişiniň göni usuly diýip atlandyrylýar?
32. Haýsy usul ulgamalýyn çyzykly algebraik deňlemeleriň işlenişiniň iterasion usuly diýip atlandyrylýar?
33. Ýollama usulyň göni hereketi näme?
34. Ýakobiniň usulyny düşündiriň.
35. Funksiýanyň approksimasiýasy näme?
36. $f(x)$ -yň $\varphi(x)$ funksiýadan ortakwadrat süýşmesi haýsy formula boýunça tapylýar?
37. Berlenler üçin Lagranžyň polinomyny ýazyň:

X	0	1	2
У	1	1,5	2

38. Berlenler üçin Lagranžyň polinomyny ýazyň:

X	-1	0	1
У	0,5	1	1,5

39. Berlenler üçin Lagranžyň polinomyny ýazyň.

X	0	0,5	1
У	2	2,5	3

40. Bölek-çyzykly interpolýasiýa nähili gurulýar?
41. Bölek-kwadrat interpolýasiýa nähili gurulýar?
42. Bölek interpolýasiýanyň wajyp ýetmezçiligi nämede?
43. Splaýn näme?
44. Iň kiçi kwadratlar usuly näme?

45. Bölek-çyzykly interpolýasiýanyň ikilenji önüminiň grafigini guruň.
46. Bölek-çyzykly interpolýasiýanyň birlenji önüminiň grafigi nähili?
47. Splaýn-interpolýasion funksiýanyň ikilenji önüminiň grafigi nähili?
48. Ahyrky tapawudlar usuly näme?
49. Eýleriň usulynyň shemasyny şekillendiriň.
50. Deňlemäniň köklerini tapmagyň iki tapyryny aýdyň.
51. Kesimi ikä bölmegiň usuly bilen deňlemäniň kökleri nähili tapylýar?
52. Iterasiýa usulynyň esasy formulasyny ýazyň.
53. Anyklanan integraly tapmagyň trapesiýalar usulyny düşündiriň.
54. Bir üýtgeýjili çyzykly däl deňlemäniň işleniňeniň umumy shemasyny görkeziň.
55. Başlangyç ýakynlaşmasy y=1 bolan $y+y\ln y=0$ deňlemäni hordalar usuly bilen işläp bolarmy, näme üçin?
56. Başlangyç ýakynlaşmasy $x = 1$ bolan $x^2+\cos x=0$ deňlemäni hordalar usuly bilen işläp bolarmy, näme üçin?